МЭ-МА1-37

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
Ханты-Мансийский автономный округ – Югра
2019-2020 учебный год

ЗАДАНИЯ
11 класс

1. Найдите последнюю ненулевую цифру числа $20^{50} \cdot 50^{20}$.

2. Числа от 1 до 600 выписаны в строку так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, стоящих через одного, будет больше 800.

3. Для произвольных натуральных чисел m и n, таких, что $m < n$, определите, какое из чисел $m^2 + \sqrt{m^2 + m}$ или $n^2 - \sqrt{n^2 - n}$ больше.

4. В основании $ABCD$ пирамиды $SABCD$ лежит точка O, причем $SA = SB = SC = SD$ и $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$. Следует ли отсюда, что SO - высота пирамиды?

5. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$. Известно, что уравнение $P(x) = x$ не имеет действительных корней. Обязательно ли уравнение $\underbrace{P(P(\dots P}_{2019}(x)\dots)) = x$ тоже не имеет действительных корней?

МЭ-МАТ-37

1. Преобразуем данное выражение $(20^{50}\cdot 50^{20})$ по свойству степеней:

$$20^{50}\cdot 50^{20} = \underbrace{(20^{20}\cdot 50^{20})}_{1000^{20}}\cdot 20^{30} \Rightarrow 1000^{20} = 1\cdot 10^{23}$$ (по определению стандартного вида числа)

$$\Rightarrow 20^{30} = 20^{10}\cdot 20^{10}\cdot 20^{10} = (2\cdot 10)^{10}\cdot(2\cdot 10)^{10}\cdot(2\cdot 10)^{10} =$$

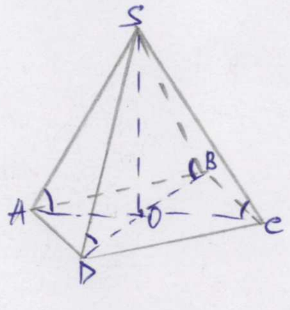
$$= 1024\cdot 1024\cdot 1024\cdot 10^{30}$$

Если $1024\cdot 1024$, то последней цифрой будет 6;
Если $1024\cdot 6$, то последней цифрой будет 4.

Ответ: 4

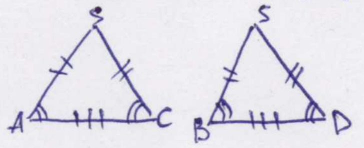
7б

4. Дано:



Доказательство:

Рассмотрим пирамиду SABCD, у которой основание ABCD является квадратом, т.к. SA = SB = = SC = SD и $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$ по условию.



$\triangle SAC = \triangle SBD$ по 3 признаку равенства треугольников.
SA = SB }
SC = SD } по условию
AC = BD (диагонали квадрата)

Т.к. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \angle SDO$, то т. O принадлежит отрезкам AC и BD $\Rightarrow$ $AC \cap BD$ в т. O

Т.к. $\triangle SAC$ и $\triangle SBD$ равнобедренные, то SO является их высотой $\Rightarrow$ SO – высота пирамиды SABCD.

Что и требовалось доказать.

7б.

2. Рассмотрим ряд произвольных чисел:

$$\underbrace{500;\ 200;\ 400;\ 100}$$ 900, 300

$$340;\ 270;\ 510;\ 200$$ 850, 470

Исходя из данных примеров можно сделать вывод, что обязательно

МЭ-МАТ-37

будет такой вариант, когда сумма каких-то двух чисел, стоящих через одного, будет больше 800.

2б

3. Если $m^2+\sqrt{m^2+m}-(n^2-\sqrt{n^2-n})<0$, то $m^2+\sqrt{m^2+m}<n^2-\sqrt{n^2-n}$

Рассмотрим пример на натуральных числах:

$m<n \quad m=4$
$4<7 \quad n=7$ $\Rightarrow$ $4^2+\sqrt{4^2+4}=16+\sqrt{20}=16+4,4=20,4$
$7^2-\sqrt{7^2-7}=49-\sqrt{42}=49-6,4=42,6$

$\sqrt{20}\approx 4,4$
$\sqrt{42}\approx 6,4$

$20,4-42,6=-22,2\ (<0) \Rightarrow m<n \Rightarrow$

$\Rightarrow m^2+\sqrt{m^2+m}<n^2-\sqrt{n^2-n}$

4б

Итого: 20б.